

Answers for:

"Natural Deduction Exercises with Derived Rules"

I wrote out these answers another year, before I renumbered the assignment to put the more challenging proofs toward the end. I have gone back through and put a new number for each proof in blue at its top right.

I numbered at least the top proofs on each page. I trust you can reason your way toward figuring out the numbers for the others easily.

28	1	$A \wedge A$	2
	2	A	$\wedge E$ 1
	3	A	
	4	A	R 3
	5	$A \wedge A$	$\wedge I$ 3,4
	6	$(A \wedge A) \leftrightarrow A$	$\leftrightarrow I$ 1-2,3-5

29	1	$M \rightarrow (A \rightarrow R)$	3
	2	$\neg A \rightarrow \neg M$	
	3	$L \wedge M$	
	4	M	$\wedge E$ 3
	5	$A \rightarrow R$	$\rightarrow E$ 1,4
	6	$\neg A$	
	7	$\neg M$	$\rightarrow E$ 2,6
	8	\perp	$\neg E$ 4,7
	9	A	IP 6-8
	10	R	$\rightarrow E$ 5,9

30	1	$\neg(\neg J \vee K) \rightarrow \neg(L \wedge M)$	4
	2	$\neg(\neg J \vee K) \wedge M$	
	3	$\neg(\neg J \vee K)$	$\wedge E$ 2
	4	$\neg(L \wedge M)$	$\rightarrow E$ 1,3
	5	$L \leftrightarrow M$	
	6	M	$\wedge E$ 2
	7	L	$\leftrightarrow E$ 5,6
	8	$L \wedge M$	$\wedge I$ 6,7
	9	\perp	$\neg E$ 4,8
	10	$\neg(L \leftrightarrow M)$	$\neg I$ 5-9

27	1	$\neg N$	1
	2	$(\neg N \rightarrow L) \wedge [D \leftrightarrow (\neg N \vee A)]$	
	3	$\neg N \rightarrow L$	$\wedge E$ 2
	4	L	$\wedge E$ 1,3
	5	$D \leftrightarrow (\neg N \vee A)$	$\wedge E$ 2
	6	$\neg N \vee A$	$\vee I$ 1
	7	D	$\leftrightarrow E$ 5,6
	8	$L \wedge D$	$\wedge I$ 4,7

31	1	$R \rightarrow (\neg C \rightarrow D)$	5
	2	$\neg C \wedge R$	
	3	$\neg C$	$\wedge E$ 2
	4	R	$\wedge E$ 2
	5	$\neg C \rightarrow D$	$\rightarrow E$ 1,4
	6	D	$\rightarrow E$ 3,5
	7	$D \wedge R$	$\wedge I$ 4,6

32	1	$J \wedge K$	6
	2	J	$\wedge E$ 1
	3	K	$\wedge E$ 1
	4	$J \vee P$	$\vee I$ 2
	5	$K \wedge (J \vee P)$	$\wedge I$ 3,4

38	1	$M \wedge (O \vee N)$	12
	2	M	$\wedge E$ 1
	3	$O \vee N$	$\wedge E$ 1
	4	M \vee O	$\vee I$ 2
	5	$(O \vee N) \wedge (M \vee O)$	$\wedge I$ 3,4

33	1	$F \wedge \neg I$	7
	2	$H \vee I$	
	3	F	$\wedge E$ 1
	4	$\neg I$	$\wedge E$ 1
	5	H	DS 2,4
	6	$H \wedge F$	$\wedge I$ 3,5

39	1	$A \vee D$	
	2	$\neg S \rightarrow C$	
	3	$A \rightarrow \neg S$	
	4	$\neg D$	
	5	A	DS 1,4
	6	$\neg S$	$\rightarrow E$ 3,5
	7	C	$\rightarrow E$ 2,6

34	1	$[M \vee (C \rightarrow T)] \wedge P$	8
	2	$(P \rightarrow \neg M) \wedge C$	
	3	$M \vee (C \rightarrow T)$	$\wedge E$ 1
	4	P	$\wedge E$ 1
	5	$P \rightarrow \neg M$	$\wedge E$ 2
	6	C	$\wedge E$ 2
	7	$\neg M$	$\rightarrow E$ 4,5
	8	$C \rightarrow T$	DS 3,7
	9	T	$\rightarrow E$ 6,8

40	1	$\neg \neg O \wedge \neg \neg S$	
	2	$\neg O \vee \neg \neg T$	
	3	$\neg \neg O$	$\wedge E$ 1
	4	$\neg T$	DS 2,3

35	1	$\neg (\neg M \vee \neg B) \wedge P$	
	2	$\neg (\neg M \vee \neg B) \vee \neg T$	$\wedge E$ 1
	3	$\neg (\neg M \vee \neg B) \vee \neg P$	$\vee I$ 2

41	1	$\neg R \rightarrow P$	
	2	$(F \vee R) \wedge (O \wedge M)$	
	3	$O \rightarrow \neg R$	
	4	$O \wedge M$	$\wedge E$ 2
	5	M	$\wedge E$ 4
	6	O	$\wedge E$ 4
	7	$\neg R$	$\rightarrow E$ 3,6
	8	P	$\rightarrow E$ 1,7

36	1	E	
	2	$R \vee E$	$\vee I$ 1
	3	$E \vee \neg (N \vee M)$	$\vee I$ 1
	4	$(R \vee E) \wedge (E \vee \neg (N \vee M))$	$\wedge I$ 2,3

42	1	$(M \wedge L) \rightarrow (P \vee R)$	
	2	$(L \wedge M) \wedge \neg R$	
	3	$L \wedge M$	$\wedge E$ 2
	4	L	$\wedge E$ 3
	5	M	$\wedge E$ 3
	6	$M \wedge L$	$\wedge I$ 4,5
	7	$P \vee R$	$\rightarrow E$ 1,6
	8	$\neg R$	$\wedge E$ 2
	9	P	DS 7,8

37	1	$(O \vee Q) \rightarrow R$	
	2	$(F \wedge Q) \wedge C$	
	3	$F \wedge Q$	$\wedge E$ 2
	4	F	$\wedge E$ 3
	5	Q	$\wedge E$ 3
	6	$O \vee Q$	$\vee I$ 5
	7	R	$\rightarrow E$ 1,6
	8	$F \wedge R$	$\wedge I$ 4,7

43	1	$L \rightarrow [M \rightarrow (\neg N \vee I)]$	17
	2	$(M \wedge I) \wedge L$	
	3	L	$\wedge E 2$
	4	$M \rightarrow (\neg N \vee I)$	$\rightarrow E 1, 3$
	5	$M \wedge I$	$\wedge E 2$
	6	M	$\wedge E 5$
	7	$\neg I$	$\wedge E 5$
	8	$\neg N \vee I$	$\rightarrow E 4, 6$
	9	$\neg N$	$DS 7, 8$

44	1	$[(B \vee M) \wedge R] \rightarrow T$	18
	2	$M \wedge R$	
	3	M	$\wedge E 2$
	4	R	$\wedge E 2$
	5	$B \vee M$	$\vee I 3$
	6	$(B \vee M) \wedge R$	$\wedge I 4, 5$
	7	T	$\rightarrow E 1, 6$

45	1	$K \wedge \neg L$	
	2	$[\neg(\neg G \wedge \neg H) \vee R] \wedge F$	
	3	$F \rightarrow \neg R$	
	4	$\neg(\neg G \wedge \neg H) \vee R$	$\wedge E 2$
	5	F	$\wedge E 2$
	6	$\neg R$	$\rightarrow E 3, 5$
	7	$\neg(\neg G \wedge \neg H)$	$DS 4, 6$
	8	$Q \vee \neg(\neg G \wedge \neg H)$	$\vee I 7$

46	1	$(A \wedge \neg C) \wedge (E \wedge F)$	
	2	$A \wedge \neg C$	$\wedge E 1$
	3	$E \wedge F$	$\wedge E 1$
	4	A	$\wedge E 2$
	5	E	$\wedge E 3$
	6	F	$\wedge E 3$
	7	$(A \wedge F)$	$\wedge I 4, 6$
	8	$(A \wedge F) \wedge E$	$\wedge I 5, 7$

47	1	$C \wedge (\neg R \wedge S)$	21
	2	$M \wedge (\neg R \rightarrow P)$	
	3	C	$\wedge E 1$
	4	$\neg R \wedge S$	$\wedge E 1$
	5	$\neg R$	$\wedge E 4$
	6	$\neg R \rightarrow P$	$\wedge E 2$
	7	P	$\rightarrow E 5, 6$
	8	$P \wedge C$	$\wedge I 3, 7$

48	1	$C \rightarrow [(C \wedge D) \rightarrow (A \rightarrow B)]$	
	2	$D \rightarrow C$	
	3	$D \wedge B$	
	4	D	$\wedge E 3$
	5	C	$\rightarrow E 2, 4$
	6	$(C \wedge D) \rightarrow (A \rightarrow B)$	$\rightarrow E 1, 5$
	7	$C \wedge D$	$\wedge I 4, 5$
	8	$A \rightarrow B$	$\rightarrow E 6, 7$

49	1	$E \rightarrow (F \wedge \neg G)$	
	2	$\neg \vee \neg H$	
	3	$E \wedge F$	
	4	E	$\wedge E 3$
	5	$F \wedge \neg G$	$\rightarrow E 1, 4$
	6	$\neg G$	$\wedge E 5$

50	1	$(L \wedge B) \wedge (Q \vee F)$	
	2	$\neg Q \wedge [(F \wedge L) \rightarrow R]$	
	3	$L \wedge B$	$\wedge E 1$
	4	L	$\wedge E 3$
	5	$Q \vee F$	$\wedge E 1$
	6	$\neg Q$	$\wedge E 2$
	7	F	$DS 5, 6$
	8	$F \wedge L$	$\wedge I 4, 7$
	9	$(F \wedge L) \rightarrow R$	$\rightarrow E 2$
	10	R	$\rightarrow E 8, 9$

① 1 $\neg L \vee M$
 2 $M \rightarrow N$ 25
 3 | L
 4 | | $\neg N$
 5 | | $\neg M$ MT 2,4
 6 | | $\neg L$ DS 1,5
 7 | | \perp TE 3,6
 8 | N IP 4-7
 9 $L \rightarrow N$ $\rightarrow I$ 3-8

② 1 $A \rightarrow B$ 26
 2 $B \rightarrow \neg C$
 3 $\neg D \rightarrow E$
 4 $\neg C \rightarrow \neg D$
 5 | $\neg E$
 6 | $\neg D$ MT 3,5
 7 | $\neg C$ MT 4,6
 8 | $\neg B$ MT 2,7
 9 | $\neg A$ MT 1,8
 10 $\neg E \rightarrow \neg A$ $\rightarrow I$ 5-9

③ 1 $\neg(H \vee U)$ 27
 2 $\neg(H \vee \neg C)$
 3 $\neg(C \wedge E)$
 4 | $\neg H \wedge \neg C$ Dem 2
 5 | $\neg C \vee \neg E$ Dem 3
 6 | $\neg C$ $\wedge E$ 4
 7 | $\neg E$ DS 4,6
 8 | $\neg H$ $\wedge E$ 4
 9 | $\neg H \wedge \neg E$ $\wedge I$ 7,8
 10 $\neg(H \vee E)$ Dem 9

④ 1 $F \vee F$ 28
 2 | $\neg F$
 3 | F DS 1,2
 4 | \perp TE 2,3
 5 | F IP 2-4
 6 | F R 5
 7 | $F \wedge F$ $\wedge I$ 5,6

⑤ 1 0 29
 2 | M
 3 | | Q
 4 | | | L
 5 | | | 0 R 1
 6 | | $L \rightarrow 0$ $\rightarrow I$ 4-5
 7 | | $Q \rightarrow (L \rightarrow 0)$ $\rightarrow I$ 3-6
 8 $M \rightarrow (Q \rightarrow (L \rightarrow 0))$ $\rightarrow I$ 2-7

⑥ 1 $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$ 30
 2 $R \wedge \neg S$
 3 | Q
 4 | | P
 5 | | Q R 3
 6 | | $P \rightarrow Q$ $\rightarrow I$ 4-5
 7 | | $R \rightarrow S$ $\rightarrow E$ 1,6
 8 | R $\wedge E$ 2
 9 | S $\rightarrow E$ 7,8
 10 | $\neg S$ $\wedge E$ 2
 11 | \perp TE 9,10
 12 $\neg Q$ $\neg I$ 3-11

⑦ 1 $R \rightarrow (\neg U \wedge P)$ 31
 2 $E \vee R$
 3 $E \rightarrow F$
 4 $F \leftrightarrow U$
 5 | $\neg U$
 6 | $\neg U \vee \neg P$ $\vee I$ 5
 7 | $\neg(U \wedge P)$ Dem 6
 8 | $\neg R$ MT 1,7
 9 | E DS 2,8
 10 | F $\rightarrow E$ 3,9
 11 | U $\leftrightarrow E$ 4,10
 12 | \perp TE 5,11
 13 U IP 5-12

⑩ 1 $(L \rightarrow \neg M) \rightarrow P$ 34
 2 $0 \wedge \neg P$
 3 | $\neg(M \wedge 0)$
 4 | $\neg M \vee \neg 0$ Dem 3
 5 | $\neg M$
 6 | | L
 7 | | $\neg M$ R 5
 8 | | $L \rightarrow \neg M$ $\rightarrow I$ 6-7
 9 | P $\rightarrow E$ 1,8
 10 | $\neg P$ $\wedge E$ 2
 11 | \perp TE 9,10
 12 | $\neg 0$
 13 | 0 $\wedge E$ 2
 14 | \perp $\rightarrow E$ 12,13
 15 | \perp AC 4,5-11,12-14
 16 $M \wedge 0$ IP 3-15

⑨ 1 $A \wedge (B \vee C)$ 33
 2 A $\wedge E$ 1
 3 $B \vee C$ $\wedge E$ 1
 4 | B
 5 | | $A \wedge B$ $\wedge I$ 2,4
 6 | | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\vee I$ 5
 7 | C
 8 | | $A \wedge C$ $\wedge I$ 2,7
 9 | | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\vee I$ 8
 10 $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ AC 3,4-6,6-9

⑧ 1 $C \wedge \neg F$ 32
 2 $(P \rightarrow H) \leftrightarrow I$
 3 $H \leftrightarrow \neg F$
 4 | P
 5 | | $\neg F$ $\wedge E$ 1
 6 | | H $\leftrightarrow E$ 3,5
 7 | P $\rightarrow H$ $\rightarrow I$ 4-6
 8 | I $\leftrightarrow E$ 2,7

⑪ 1 $\neg(Q \wedge C)$ 35
 2 $D \rightarrow C$
 3 $\neg Q \rightarrow \neg D$
 4 | $\neg D$
 5 | | $\neg Q$ MT 3,4
 6 | | $\neg Q \vee \neg C$ Dem 1
 7 | $\neg C$ DS 5,6
 8 | $\neg D$ MT 2,7
 9 | \perp TE 4,8
 10 $\neg D$ IP 4-9

⑫	1	$E \rightarrow (F \rightarrow G)$	36
	2	E	
	3	$\neg F \rightarrow \neg E$	
	4	$\neg G$	
	5	$F \rightarrow G$	$\rightarrow E$ 1,2
	6	$\neg F$	MT 4,5
	7	$\neg E$	$\rightarrow E$ 3,6
	8	\perp	$\neg E$ 2,7
	9	G	IP 4-8

⑬	1	$\neg(M \vee N)$	
	2	$\neg\neg(M \leftrightarrow \neg N)$	
	3	$M \leftrightarrow \neg N$	DNE 2
	4	$\neg M \wedge \neg N$	DeM 1
	5	$\neg M$	$\wedge E$ 4
	6	$\neg N$	$\wedge E$ 4
	7	M	$\leftrightarrow E$ 3,6
	8	\perp	$\neg E$ 5,7
	9	$\neg(M \leftrightarrow \neg N)$	IP 2-8

⑭	1	$(D \rightarrow E) \rightarrow D$	
	2	$\neg D$	
	3	$\neg(D \rightarrow E)$	MT 1,2
	4	$D \rightarrow \neg D$	
	5	$\neg E$	
	6	\perp	$\neg E$ 2,4
	7	E	IP 5-6
	8	$D \rightarrow E$	$\rightarrow I$ 4-7
	9	\perp	$\neg E$ 3,8
	10	D	IP 2-9

⑮	1	$B \rightarrow C$	39
	2	$\neg C$	
	3	$\neg B$	MT 1,2
	4	$\neg B \vee \neg G$	$\vee I$ 3
	5	$\neg(B \wedge G)$	DeM 4
	6	$\neg C \rightarrow \neg(B \wedge G)$	$\rightarrow I$ 2-5

⑯	1	$R \rightarrow S$	
	2	$\neg R \rightarrow \neg S$	
	3	R	
	4	S	$\rightarrow E$ 1,3
	5	$\neg S$	
	6	$\neg R$	
	7	$\neg S$	$\rightarrow E$ 2,6
	8	\perp	$\neg E$ 5,7
	9	R	IP 6-8
	10	$R \leftrightarrow S$	$\leftrightarrow I$ 3,4,5-9

⑰	1	$(Q \rightarrow S) \wedge \neg N$	
	2	$(\neg Q \rightarrow O) \vee N$	
	3	$(\neg S \rightarrow O) \rightarrow L$	
	4	$Q \rightarrow S$	$\wedge E$ 1
	5	$\neg N$	$\wedge E$ 1
	6	$\neg Q \rightarrow O$	DS 2,5
	7	$\neg S$	
	8	$\neg Q$	MT 4,7
	9	O	$\rightarrow E$ 6,8
	10	$\neg S \rightarrow O$	$\rightarrow I$ 7-9
	11	L	$\rightarrow E$ 3,10

18	1	$B \vee 7C$	42
	2	$7B \vee 7C$	
	3	$77C$	
	4	B	DS 1,3
	5	$7B$	DS 2,3
	6	L	7E 4,5
	7	$7C$	IP 3-6

19	1	$H \vee (F \vee D)$	43
	2	$7[D \vee (F \vee H)]$	
	3	$7D \wedge 7(F \vee H)$	Dem 2
	4	$7D$	$\wedge E$ 3
	5	$7(F \vee H)$	$\wedge E$ 3
	6	$7F \wedge 7H$	Dem 5
	7	$7F$	$\wedge E$ 6
	8	$7H$	$\wedge E$ 6
	9	$F \vee D$	DS 1,8
	10	D	DS 7,9
	11	L	7E 4,10
	12	$D \vee (F \vee H)$	IP 2-11

20	1	$(C \vee E) \vee F$	44
	2	$7C$	
	3	$7E$	
	4	$7F$	
	5	$C \vee E$	DS 1,4
	6	$7C \wedge 7E$	$\wedge I$ 2,3
	7	$7(C \vee E)$	Dem 6
	8	L	7E 5,7
	9	F	IP 4-8
	10	$7E \rightarrow F$	$\rightarrow I$ 3-9
	11	$7C \rightarrow (7E \rightarrow F)$	$\rightarrow I$ 2-10

21	1	$J \wedge (7K \rightarrow L)$	45
	2	J	$\wedge E$ 1
	3	$7K \rightarrow L$	$\wedge E$ 1
	4	$7[(7 \wedge K) \vee (7 \wedge L)]$	
	5	$7(7 \wedge K) \wedge 7(7 \wedge L)$	Dem 4
	6	$7(7 \wedge K)$	$\wedge E$ 5
	7	$7(7 \wedge L)$	$\wedge E$ 5
	8	$7J \vee 7K$	Dem 6
	9	$7J \vee 7L$	Dem 7
	10	$777J$	
	11	$7J$	DNE 10
	12	L	7E 2,11
	13	$77J$	IP 10-12
	14	$7K$	DS 8,13
	15	$7L$	DS 9,13
	16	L	$\rightarrow E$ 3,14
	17	L	7E 15,16
	18	$(7 \wedge K) \vee (7 \wedge L)$	IP 4-17

22	1	$R \leftrightarrow S$	46
	2	$(S \vee T) \wedge 7T$	
	3	$S \vee T$	$\wedge E$ 2
	4	$7T$	$\wedge E$ 2
	5	S	DS 3,4
	6	R	$\leftrightarrow E$ 1,5

23	1	$G \leftrightarrow 7H$	47
	2	$7H \leftrightarrow I$	
	3	$I \leftrightarrow 7E$	
	4	$7E$	
	5	I	$\leftrightarrow E$ 3,4
	6	$7H$	$\leftrightarrow E$ 2,5
	7	G	$\leftrightarrow E$ 1,6
	8	$7E \rightarrow G$	$\rightarrow I$ 4-7

(24)	1	$[M \vee (O \leftrightarrow T)] \wedge N$	48
	2	$N \leftrightarrow \neg M$	
	3	B	
	4	N	$\wedge E 1$
	5	$\neg M$	$\leftrightarrow E 2,4$
	6	$M \vee (O \leftrightarrow T)$	$\wedge E 1$
	7	$O \leftrightarrow T$	DS 5,6
	8	$B \rightarrow (O \leftrightarrow T)$	$\rightarrow I 3-7$

(25)	1	$\neg S \leftrightarrow C$	49
	2	$(F \vee S) \wedge (G \wedge M)$	
	3	$G \rightarrow \neg S$	
	4	F \vee S	$\wedge E 2$
	5	G \wedge M	$\wedge E 2$
	6	G	$\wedge E 5$
	7	M	$\wedge E 5$
	8	$\neg S$	$\rightarrow E 3,6$
	9	C	$\leftrightarrow E 1,8$
	10	M \wedge C	$\wedge I 7,9$

(26)	1	$(A \wedge B) \leftrightarrow (P \vee D)$	50
	2	$(B \wedge A) \wedge \neg D$	
	3	B \wedge A	$\wedge E 2$
	4	B	$\wedge E 3$
	5	A	$\wedge E 3$
	6	A \wedge B	$\wedge I 4,5$
	7	P \vee D	$\leftrightarrow E 1,6$
	8	$\neg D$	$\wedge E 2$
	9	P	DS 7,8